جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
پانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۵

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۳۰	-	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۳۰ سوال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- اعداد زوج متوالی ۲، ۴، ۶، ۸، . . . را آنقدر ضرب می‌کنیم تا حاصل بر ۱۳۷۵ بخش‌پذیر شود. بزرگترین عدد زوج به کار رفته در کدام‌یک از روابط زیر صدق می‌کند؟

الف) بین ۱ تا ۱۱
ب) بین ۱۱ تا ۲۱
ج) بین ۲۱ تا ۳۱
د) بین ۳۱ تا ۴۱
هـ) چنین کاری امکان‌پذیر نیست.

۲- اگر $9x+5y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، برای اینکه لزوماً $10x+ky$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر شود، k را برابر کدام‌یک از مقادیر زیر انتخاب کنیم؟

الف) ۲
ب) ۴
ج) ۶
د) ۸
هـ) ۱۰

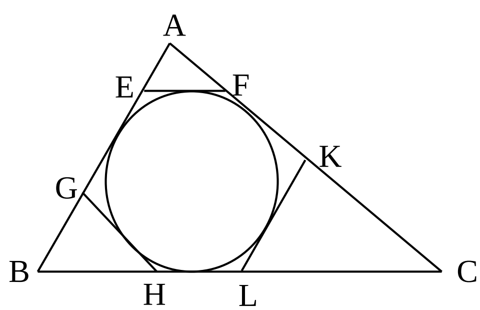
۳- مربع $ABCD$ در صفحه مفروض است. سه خط موازی L_1، L_2 و L_3 را به‌ترتیب از سه رأس A، B و C رسم می‌کنیم، به‌طوری‌که فاصله‌ی L_1 با L_2 برابر ۵ و فاصله‌ی L_2 با L_3 برابر ۷ باشد. مطلوب است مساحت مربع.

الف) ۷۰
ب) $\sqrt{35}$
ج) ۳۵
د) $\sqrt{74}$
هـ) ۷۴

۴- تعداد سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) از اعداد طبیعی که در معادلات $x+y^2-z=124$ و $x^2+y-z=100$ صدق می‌کنند عبارت است از:

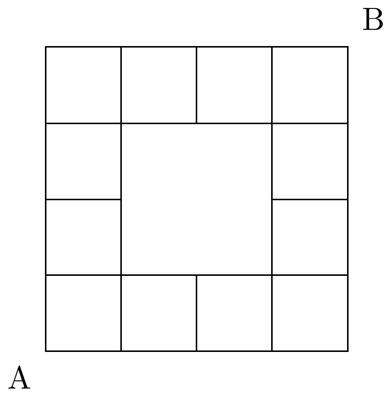
الف) ۰
ب) ۱
ج) ۲
د) ۳
هـ) ۴

۵- مثلث ABC و دایرهٔ محاطی آن به شعاع r مفروض است. سه مماس EF، GH و KL را به‌ترتیب موازی BC، AC و AB رسم کرده‌ایم. اگر r_a، r_b و r_c به‌ترتیب شعاع‌های دایره‌های محاطی مثلث‌های AEF، BGH و CKL باشند، آنگاه کدام‌یک از روابط زیر همواره صحیح است؟



الف) $r-r_a<r_a+r_b$
ب) $r-r_a>r_b+r_c$
ج) $r-r_a=r_b+r_c$
د) $r-r_a=r_b-r_c$
هـ) هیچ‌کدام از این روابط همواره برقرار نیست.

۶- در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم روی خطوط رسم‌شده از A به B برویم به‌طوری‌که کوتاه‌ترین مسیر ممکن را پیموده باشیم؟



الف) ۱۸
ب) ۳۴
ج) ۲۶
د) ۲۸
هـ) ۳۲

۷- عدد طبیعی b را که از وارون کردن ارقام عدد طبیعی a به‌دست می‌آید مقلوب a می‌نامیم (مثلاً مقلوب ۱۳۷۵ عدد ۵۷۳۱ است). مطلوب است تعداد اعداد بین ۱ تا ۹۹۹۹۹، که مقلوبشان با خودشان برابر است.

الف) ۱۰۹۸ ب) ۱۲۲۰ ج) ۹۷۶ د) ۱۵۴۲ هـ) ۱۰۰۸

۸- فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی باشند که $a \neq ۰$. اگر a و $۴a + ۳b + ۲c$ دارای یک علامت باشند، کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر برای معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ درست است؟

الف) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی $(۱,۴)$ قرار گیرند.
ب) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی $(۱,۲)$ قرار گیرند.
ج) معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است.
د) دو ریشه‌ی معادله در صورت وجود دارای علامت‌های متفاوتی هستند.
هـ) هر دو ریشه‌ی معادله در صورت وجود دارای علامت یکسانی هستند.

۹- دنباله‌های $a_n = \sqrt{۱۲۳ + n^۲}$ و $b_n = n + ۳$ $(n = ۱,۲,۳,\ldots)$ داده شده‌اند. فرض کنید که r کوچکترین عدد صحیح باشد که $a_r < b_r$ و s نیز بزرگترین عدد صحیحی باشد که $a_s > b_s + ۱$. در این‌صورت $r + s$ برابر است با:

الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۳۲ د) ۳۳ هـ) ۳۸

۱۰- مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ مفروض است. نیمساز زاویه‌ی B ضلع AC را در D قطع می‌کند و داریم $BC = BD + AD$. اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر است با :

الف) ۱۰۰° ب) ۱۰۸° ج) ۱۱۰° د) ۱۱۵° هـ) ۱۲۰°

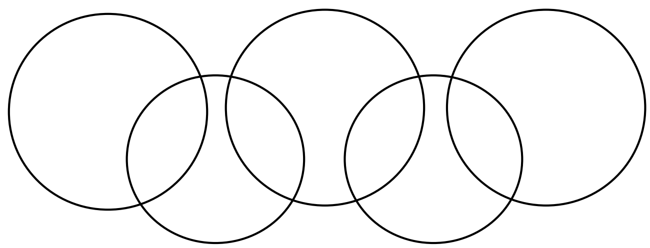
۱۱- در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ میانهٔ BM عمود بر نیمساز CD است. در این‌صورت $SinC$ برابر با کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ د) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ هـ) $\frac{۱}{۴}$

۱۲- فرض کنید a، b و c سه عدد صحیح و مثبت باشند به‌طوری‌که $a < ۲b$ و باقیماندهٔ تقسیم a بر b برابر $۲r$، باقیماندهٔ تقسیم a بر c برابر r، و باقیماندهٔ تقسیم b بر c نیز برابر r است. در این‌صورت کوچکترین عدد از میان اعداد زیر که بر c بخش‌پذیر باشد کدام است؟

الف) $(a+b)$ ب) $\frac{(a+b)}{۲}$ ج) $\frac{(a+b)}{۳}$ د) $۲(a+b)$ هـ) $۳(a+b)$

۱۳- ۵ دایره مطابق شکل، ۹ ناحیه (متناهی) در صفحه به‌وجود آورده‌اند. اعداد از ۱ تا ۹ را به این نواحی طوری نسبت می‌دهیم که مجموع اعداد هر دایره با مجموع اعداد دایره‌های دیگر مساوی باشد. بیشترین مقداری که این مقدار مساوی می‌تواند داشته باشد، عبارت است از:



الف) ۱۲
ب) ۱۳
ج) ۱۴
د) ۱۵
هـ) ۱۶

۱۴- اگر $S = \frac{(۲^r-۱)(۳^r-۱)(۴^r-۱)...(۱۰۰^r-۱)}{(۲^r+۱)(۳^r+۱)(۴^r+۱)...(۱۰۰^r+۱)}$ کدام‌یک از مقادیر زیر به S نزدیکتر است؟

الف) ۰/۶ ب) ۰/۶۷ ج) ۰/۶۶۷ د) ۰/۶۶۶۷ هـ) ۰/۶۶۶۶۷

۱۵- به‌ازای کدام مقدار n معادله‌ی $\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{n}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای جواب منحصربه‌فردی است؟

الف) ۱۰۲۴ ب) ۲۱۱۹ ج) ۲۲۱۹ د) ۲۶۵۱ هـ) هیچ‌کدام

۱۶- یک صفحه شطرنجی ۲۵×۲۵ را در نظر گرفته اعداد ۱ تا $۲۵^۲$ را به‌ترتیب زیر در خانه‌های آن قرار می‌دهیم. اعداد ۱، ۲، . . . و ۲۵ را از چپ به راست در سطر اول، ۲۶، ۲۷، . . . و ۵۰ را از چپ به راس در سطر دوم، و بقیه را بـه همین ترتیب در سطرهای بعدی مربع قرار می‌دهیم. حال اگر ۲۵ خانه را چنان انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نباشند در آن‌صورت مجموع اعداد این خانه‌ها چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد؟

الف) فقط می‌تواند برابر $\binom{۲۵}{۲}$ باشد.

ب) هر مقدار بین $\binom{۲۵}{۲}$ و $\binom{۲۵}{۳}$ می‌تواند باشد.

ج) فقط می‌تواند $\frac{۱}{۲}(۲۵^r + ۲۵)$ باشد.

د) هر مقدار بین $\binom{۲۵}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}(۲۵^۳ + ۲۵)$ می‌تواند باشد.

هـ) هر مقدار بین $۲۵^۲$ و $\frac{۱}{۲}(۲۵^۳ + ۲۵)$ می‌تواند باشد.

۱۷- چندجمله‌ای $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$، که a_iها اعداد صحیح هستند، مفروض است. اگر داشته باشیم $P(1)=P(2)=0$، در آن‌صورت دقیق‌ترین حکمی که در مورد ضرایب P می‌توان بیان کرد کدام است؟

الف) ضریب جملهٔ ثابت (یعنی a_0) کوچکتر یا مساوی ۲ است.

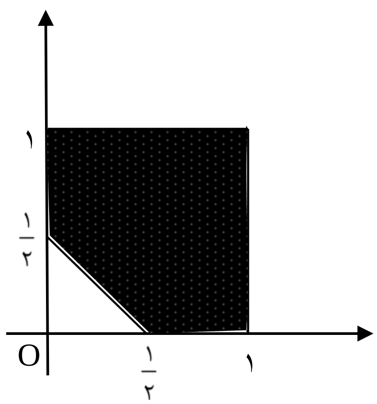
ب) اختلاف بین تعداد ضرایب مثبت و ضرایب منفی حداکثر یک است.

ج) مجموع ضرایب توان‌های فرد قرینهٔ مجموع ضرایب توان‌های زوج است.

د) حداقل یک ضریب کوچکتر یا مساوی -2 وجود دارد.

هـ) هیچ‌کدام از حکم‌های بالا در مورد تمامی $P(x)$ها صدق نمی‌کنند.

۱۸- مربع $S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ را در نظر بگیرید و به‌ازای هر $t\in[0,1]$، C_t را مجموعهٔ نقاطی از S در نظر بگیرید که بالای خط واصل بین نقاط $(0,1-t)$ و $(t,0)$ هستند ($C_{\frac{1}{2}}$ در شکل نشان داده شده است). اگر A اشتراک تمام C_tها، $0\le t\le 1$، باشد یعنی $A=\{x\mid x\in C_t, \forall t\in[0,1]\}$. در آن‌صورت A برابر کدام‌یک از مجموعه‌های زیر است؟



الف) $S\cap\{(x,y)\mid x+y\ge 1\}$

ب) $S\cap\{(x,y)\mid x+\sqrt{y}\ge 1\}$

ج) $S\cap\{(x,y)\mid \sqrt{x}+y\ge 1\}$

د) $S\cap\{(x,y)\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 1\}$

هـ) $S\cap\{(x,y)\mid \sqrt{x+y}\ge 1\}$

۱۹- فرض کنید که $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ ده عدد طبیعی زوج و متمایز باشند. برای هر دنباله‌ی دلخواه $a_1, a_2, \ldots$ و a_{1375} که a_iها از اعداد P_1 تا P_{10} باشند کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

الف) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها یک مربع کامل است.

ب) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها یک مکعب کامل است.

ج) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها دو برابر یک مربع کامل است.

د) تعدادی متناهی از a_iهای متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها دو برابر یک مکعب کامل است.

هـ) الف و ب هر دو درست است.

۲۰- فرض کنید ۱۳۷۵ بزرگترین عدد صحیحی است که 2^{1375}، عدد طبیعی n را می‌شمارد. در آن‌صورت بزرگترین مقدار k به‌طوری‌که 2^k عدد $A=1+9+9^2+\ldots+9^{4n-1}$ را بشمارد برابر است با :

الف) ۱۳۷۴ ب) ۱۳۷۵ ج) ۱۳۷۶ د) ۱۳۷۷ هـ) ۱۳۷۸

۲۱- فرض کنید f و g دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و با درجهٔ بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشند. اگر داشته باشیم :

$$f\; x^{۲} = f\left(x-\frac{۱}{۲}\right)g\left(x+\frac{۱}{۲}\right)n \geq ۲$$

در این‌صورت از بین نتیجه‌گیری‌های زیر، کدام‌یک دقیق‌تر است؟

الف) به‌ازای هر $n \geq ۲$ چنین چندجمله‌ای‌هایی وجود دارند به‌طوری‌که f از درجه‌ی n است.

ب) چنین چندجمله‌ای‌هایی وجود ندارند.

ج) $f(x)$ ریشه‌ای در $\left(۱,\frac{۱}{۲}\right)$ دارد.

د) $g(x)$ ریشه‌ای در $\left(۱,\frac{۱}{۲}\right)$ دارد.

هـ) $g(x)$ برای هر x بزرگ‌تر از صفر است.

۲۲- در مثلث مفروض ABC، D را پای نیمساز رأس A و E را قرینه‌ی D نسبت به نقطه‌ی وسط ضلع BC می‌گیریم. حال اگر F را روی BC به قسمی انتخاب کنیم که $\angle BAF = \angle EAF$ در آن‌صورت $\frac{BF}{FC}$ برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{c}{b}$ ب) $\frac{c^{۲}}{b^{۲}}$ ج) $\frac{c^{۳}}{b^{۳}}$ د) $\frac{c}{c+b}$ هـ) $\frac{c^{۲}}{c+b\;^{۲}}$

۲۳- در مثلث ABC نقطهٔ H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث است. اگر $AH = BC$، آنگاه زاویه‌ی A چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

الف) ۳۰° و ۴۵° ب) ۶۰° و ۷۵° ج) ۶۰° د) ۴۵° هـ) ۴۵° و ۶۰°

۲۴- اگر $S = \{۱,۲,۳,\ldots,۹۹\}$، آنگاه بزرگ‌ترین زیرمجموعه‌ی آن با این خاصیت که هیچ عضو آن دو برابر دیگری نباشد چند عضو دارد؟

الف) ۵۵ ب) ۶۲ ج) ۶۶ د) ۷۱ هـ) ۷۷

۲۵- در مورد تعداد دنباله‌های $n_۱$، $n_۲$، $n_۳$، ... از اعداد طبیعی با این خاصیت که برای هر k داشته باشیم $n_{k+۱} > n_{n_k}$ چه می‌توان گفت؟

الف) بینهایت دنباله با این خاصیت وجود دارد.
ب) تعداد زوجی از این دنباله‌ها وجود دارد.
ج) دقیقاً ۵ دنباله با این خاصیت وجود دارد.
د) دقیقاً ۳ دنباله با این خاصیت وجود دارد.
هـ) دقیقاً یک دنباله با این خاصیت وجود دارد.

۲۶- برای عدد طبیعی n، بسط n در مبنای ۲ را در نظر گرفته و $f(n)$ را برابر تعداد رقم‌های صفر در آن در نظر می‌گیریم (به‌عنوان مثال $f(۴) = ۲$ و $f(۶) = ۱$). اگر فرض کنیم که $S = ۲^{f(۱)} + ۲^{f(۲)} + \ldots + ۲^{f(۲۵۵)}$ آنگاه مقدار S برابر خواهد بود با :

الف) ۳۲۸۰ ب) ۱۰۹۰ ج) ۱۰۸۶ د) ۳۲۷۶ هـ) ۶۵۶۰

۲۷- در حاصل‌ضرب $\prod_{1\le i<j\le 9}(x_i-x_j)$ ضریب جملهٔ $x_1^4x_2^4\dots x_9^4$ برابر است با :

الف) صفر
ب) $\binom{9}{4}$
ج) $-\binom{9}{4}$
د) $9\times\binom{9}{3}\times\binom{9}{2}$
هـ) $-9\times\binom{9}{3}\times\binom{9}{2}$

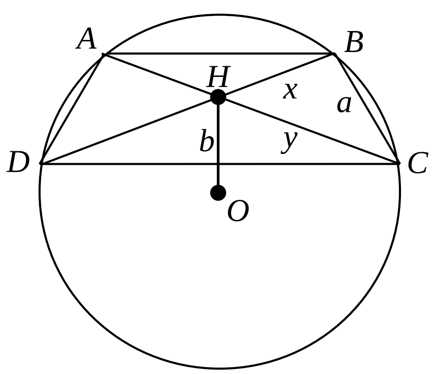
۲۸- تعداد زوجی بردار واحد از یک نقطه از صفحه رسم شده‌اند به‌طوری‌که یک در میان قرمز و آبی هستند. فرض کنید $\vec{R}$ مجموع بردارهای قرمز و $\vec{B}$ مجموع بردارهای آبی باشد. در این‌صورت دقیق‌ترین حکمی که می‌توان گفت چیست؟

الف) $\left|\vec{R}-\vec{B}\right|\le 2$
ب) $\left|\vec{R}-\vec{B}\right|\le 1+\sqrt{2}$
ج) $\left|\vec{R}-\vec{B}\right|\le 1+\sqrt{3}$
د) $\left|\vec{R}-\vec{B}\right|\le \frac{2\pi}{3}$
هـ) $\left|\vec{R}-\vec{B}\right|\le \pi-1$

۲۹- ۲۵ نقطه به‌طور دلخواه روی دایره‌ای قرار گرفته‌اند. مطلوب است حداقل تعداد کمان‌های کوچکتر یا مساوی 120° که توسط این نقاط درست می‌شود.

الف) ۱۰۰
ب) ۱۲۰
ج) ۱۳۲
د) ۱۴۴
هـ) ۱۴۹

۳۰- در شکل زیر $ABCD$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محاط در دایرهٔ واحد است. فرض کنید $x<y$. در این‌صورت $y-x$ برابر است با:



الف) $(ab)^2$
ب) $a\sqrt{b}$
ج) ab
د) $b\sqrt{a}$
هـ) $\sqrt{ab}$

پاسخ های تشریحی

۱- گزینه (ج) صحیح است.

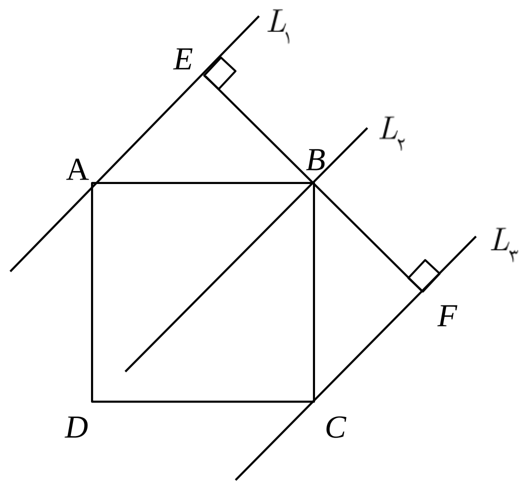
توجه کنید که $1375 = 5^3 \times 11$. چون بین اعداد زوج فقط مضرب‌های ۱۰ عامل ۵ دارند، پس بزرگترین عدد به‌کار رفته ۳۰ است.

۲- گزینه (د) صحیح است.

چون $9x + 5y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس $2x + 6y$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است. پس $5(2x + 6y)$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است و بنابراین، $k \overset{11}{\equiv} 30$. پس $k = 8$.

۳- گزینه (هـ) صحیح است.

از B خطی عمود بر خط‌های موازی رسم کنید تا L_1 را در E و L_3 را در F قطع کند.



در این‌صورت، مثلث AEB با مثلث BFC همنهشت است. پس $AE = BF = 5$. بنابراین،

$$AB^2 = AE^2 + BF^2 = 5^2 + 7^2 = 74$$

۴- گزینه (ج) صحیح است.

با کم کردن دو معادله از یکدیگر به‌دس می‌آوریم

$$\begin{aligned} 24 &= x + y^2 - x^2 - y \\ &= (y - x)(y + x - 1) \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر $y - x$ زوج باشد، $(y + x - 1)$ فرد است و اگر $y - x$ فرد باشد، $(y + x - 1)$ زوج است. پس فقط حالت‌های زیر امکان دارد:

$$\begin{cases} y-x=۳ \\ y+x-۱=۸ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y-x=۱ \\ y+x-۱=۲۴ \end{cases}$$

بنابراین، $(x,y,z)=(۱۲,۱۳,۵۷)$ یا $(x,y,z)=(۳,۶,-۸۵)$.

در اعداد طبیعی یک جواب و در اعداد صحیح هشت جواب دارد.

۵- گزینه (ج) صحیح است.

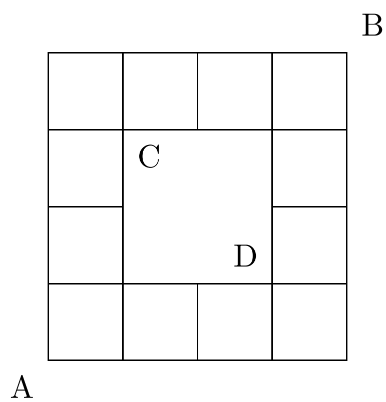
به‌سادگی می‌توان دید که مثلث‌های AEF, BGH و CKL با مثلث ABC متشابه‌اند و نسبت‌های تشابه نیز اعداد $\frac{p-a}{p}$, $\frac{p-b}{p}$ و $\frac{p-c}{p}$ هستند. چون

$$\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}=۱$$

پس $r_a+r_b+r_c=r$ و از آنجا $r-r_a=r_b+r_c$.

۶- گزینه (ب) صحیح است.

برای رفتن از A به B اگر از C بگذریم تعداد راه‌های ممکن ۱۶(۴×۴) است (از A به C چهار راه و از C به B نیز چهار راه)



به همین ترتیب، اگر از D نیز بگذریم ۱۶ راه وجود دارد. امّا دو مسیر نیز وجود دارند که از هیچ‌کدام از D و C نمی‌گذرند (روی مرز مربع بزرگتر). پس تعداد کل حالت‌ها ۳۴ حالت است.

۷- گزینه (الف) صحیح است.

n_k را تعداد عددهای k رقمی می‌گیریم که با مقلوب خود برابرند. برای اینکه عددی n رقمی باشد که با مقلوب خود برابر است، رقم یکان آن نباید صفر باشد. اکنون توجه کنید که

اگر $k=۱$ آنگاه $n_۱=۹$

اگر $k=۲l+۱,\ l\geq ۱$ آنگاه $n_k=۹\times ۱۰^{l}$

اگر $k=۲l,\quad l\geq ۱$ آنگاه $n_k=۹\times ۱۰^{l-۱}$

پس

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 9 + 9 + 90 + 90 + 900 = 1098$$

۸- گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید معادله دو ریشه حقیقی مانند x_1 و x_2 داشته باشد. در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{4a + 3a + 2c}{a} \\ &= 4 + 3\frac{a}{b} + 2\frac{c}{a} \\ &= 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 4 \\ &= (x_1 - 1)(x_2 - 2) + (x_1 - 2)(x_2 - 1) \end{aligned}$$

پس هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه $(1,2)$ باشند.

۹- گزینه (د) صحیح است.

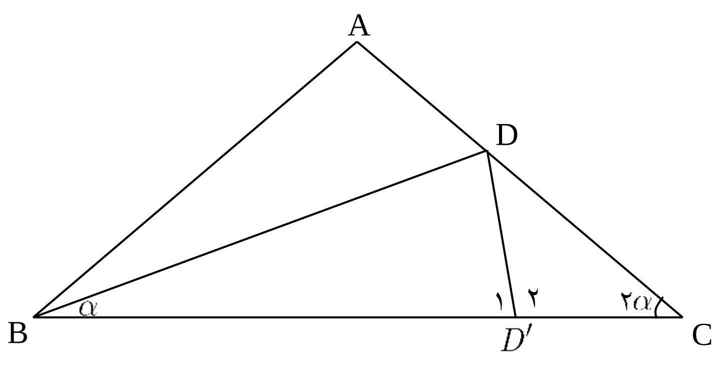
با حل نامعادله‌های $\sqrt{123 + r^2} < r + 3$ و $\sqrt{123 + s^2} < s + 4$ می‌توان به آسانی نتیجه گرفت که $r = 20$ و $s = 13$. پس $r + s = 23$.

۱۰- گزینه (ج) صحیح است.

چون BD نیمساز زاویه B است می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AB}$$

اگر D' را روی BC چنان انتخاب کنیم که $BD = BD'$،



آنگاه $AD = D'C$ و رابطه بالا را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{DC}{BC} = \frac{D'C}{AC}$$

و چون دو مثلث $DD'C$ و ABC در زاویه C نیز مشترک‌اند پس با هم متشابه‌اند. بنابراین، مثلث $DD'C$ متساوی‌الساقین است. پس، اگر زاویه C برابر ۲α باشد، چون $\angle DD'C$ زاویه خارجی مثلث $DD'C$ است نتیجه می‌شود $\angle DD'C = ۴\alpha$ همچنین چون مثلث $BD'D$ متساوی‌الساقین است می‌توانیم بنویسیم

$$۱۸۰^\circ = \alpha + ۴\alpha + ۴\alpha = ۹\alpha$$

و در نتیجه $\alpha = ۲۰^\circ$. بنابراین،

$$\angle A = ۱۸۰^\circ - ۴\alpha = ۹\alpha$$

۱۱- گزینه (د) صحیح است.

اگر نقطه تقاطع BM و CD را E بنامیم، روشن است که مثلث‌های قائم‌الزاویه EBC و EMC همنهشت‌اند. پس $BC = MC$ و در نتیجه، $AC = ۲BC$.

اگر $\angle C$ برابر با α باشد، $\angle A = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$ و بنابراین،

$$\sin A = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

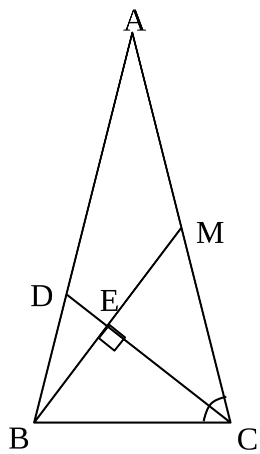
پس از قضیه سینوسها

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{BC}{AC}$$

نتیجه می‌شود،

$$\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{۱}{۲}$$

و بنابراین، $\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$ یا $\sin\alpha = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$.



۱۲- گزینه (ب) صحیح است.

توجه کنید که می‌توانیم بنویسیم

$$a = mc + r, \qquad b = nc + r\ , \qquad a = lb + ۲r$$

که n,m و l عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. چون $a < ۲b$، نتیجه می‌شود $l = ۰$ یا $l = ۱$.

اگر $l=0$، نتیجه می‌شود $a=2r$ و درنتیجه $mc=r$. اما $0\le r<c$. پس $m=0$ بنابراین، $r=0$. پس $a=0$ که تناقض است. اگر $l=1$، نتیجه می‌شود $a=b+2r$ و درنتیجه، $b=a-2r$. بنابراین،

$$\frac{a+b}{2}=\frac{a+b-2r}{2}=a-r=mc$$

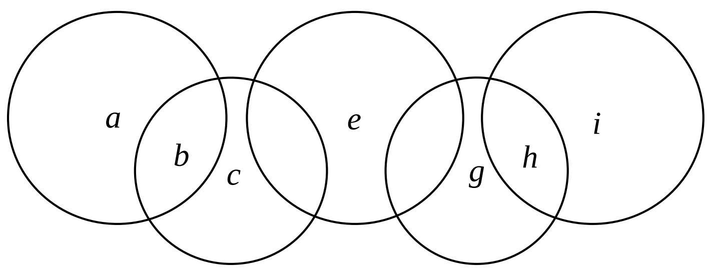
یعنی $\frac{a+b}{2}$ بر c بخش‌پذیر است. اما $\frac{a+b}{3}$ لزوماً بر c بخش‌پذیر نیست. در واقع از

$$\frac{a+b}{3}=\frac{2a-2r}{3}=\frac{2(a-r)}{3}=\frac{2mc}{3}$$

نتیجه می‌شود که اگر $\frac{a+b}{3}$ بر c بخش‌پذیر باشد، m باید بر۳ بخش‌پذیر باشد. پس لزوماً $a\ge 3c$ و $b\ge 3c$. اما مثال $a=15, b=9$ و $c=6$ نشان می‌دهد که این روابط لزوماً برقرار نیستند.

۱۳- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

فرض می‌کنیم اعداد مطابق شکل قرار داده شده باشند و مقدار مشترک را N می‌نامیم.



می‌توانیم بنویسیم

$$N=a+b=h+i$$

بنابراین،

$$2N\le 6+9+7+8=2\times 30$$

و در نتیجه، $N\le 15$. امّا اگر $N=15$. آنگاه

$$\{a,b,h,i\}=\{9,8,7,6\}$$

و درنتیجه با استفاده از دایره وسط،

$$N=d+e+f\le 5+4+3=12$$

که تناقض است. پس $N\le 14$. مقادیر زیر نشان می‌دهد که $N=14$ ممکن است.

$$a=5,b=9,c=2,d=3,e=4,f=7,g=1,h=9,i=8$$

۱۴- ماخ گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که

$$S=\frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^3+3+1)\dots(100-1)(100^2+100+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^3-3+1)\dots(100+1)(100^2-100+1)}$$

اما چون

$$((n+۲)-۱) = n+۱$$

و

$$(n+۱)^۲ - (n+۱) + ۱ = n^۲ + n + ۱$$

نتیجه می‌شود

$$S = \frac{(۲-۱)(۳-۱)(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱)}{(۲^۲-۲+۱)(۹۹+۱)(۱۰۰+۱)} = \frac{۱۰۱۰۱}{۱۵۱۵۰} \simeq ۰/۶۶۶۷۳$$

-۱۵ ماخ گزینه (هـ) صحیح است.

ثابت می‌کنیم معادله

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{n}$$

در مجموعه اعداد طبیعی جواب منحصربه‌فرد دارد اگر و فقط اگر n عددی اول باشد. فرض کنید p عددی اول باشد. در این‌صورت معادله

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{p}$$

را می‌توانیم به‌صورت

$$x = \frac{yp}{y+p}$$

بنویسیم. در این‌صورت،

$$yp = x(y+p)$$

پس $x(y+p)$ عامل p دارد. اما اگر $x = kp$، آنگاه $y = k(y+p)$ که ناممکن است. پس $y+p = kp$. پس $y = p(k-۱)$. بنابراین،

$$x = \frac{p^۲(k-۱)}{p^k} = \frac{p(k-۱)}{k}$$

اما چون $k > ۱$، نتیجه می‌شود $k = p$. بنابراین $y = p(p-۱)$ و $x = p-۱$ جواب منحصربه‌فرد معادله است.
از طرف دیگر؛ اگر $q > ۱, p > ۱$ و $n = pq$، آنگاه معادله دارای دو جواب متمایز

$$x = n-۱,\ \ y = n(n-۱)$$

و

$$x = p(q-۱), \quad y = pq(q-۱)$$

است. توجه کنید هیچ‌کدام از اعداد داده شده اول نیست.

-۱۶ ماخ گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که اعداد $i + ۲۵j$ $(j = ۰,۱,\ldots,۲۴)$ را در ستون iام چیده‌ایم. حال اگر اعداد را چنان انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نباشند، ۲۵ عدد به‌صورت $i + ۲۵j$ با i و j های متمایز داریم. پس مجموع این عددها برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+۲۵+(۰\times ۲۵+۱\times ۲۵+\cdots+۲۴\times ۲۵)$$

که عبارت فوق برابر است با

$$\frac{۲۵(۲۵+۱)}{۲}+۲۵\times\frac{۲۴(۲۴+۱)}{۲}=\frac{۱}{۲}(۲۵^{۳}+۲۵)$$

۱۷- ماخ گزینه (د) صحیح است.

روشن است که $P(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. فرض کنید

$$h(x)=\frac{P(x)}{x-۲}=b_{n-۱}x^{n-۱}+b_{n-۲}x^{n-۲}+\cdots+b_{۰}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که اگر $۰\le k\le n$، آنگاه

$$b_k-۲b_{k+۱}=a_{k+۱}$$

و $a_{۰}=-۲b_{۰}$. توجه کنید که $h(۱)=-P(۱)=۰$. پس

$$b_{n-۱}+b_{n-۲}+\cdots+b_{۰}=۰$$

همه ضرایب b_i نمی‌توانند هم‌علامت باشند. پس دست‌کم یکی از این ضرایب بزرگتر از یا مساوی با ۱ است. اگر $b_{۰}\ge ۱$، آنگاه $a_{۰}\le -۲$.

اگر $b_{۰}<۱$، فرض کنید k کوچکترین عدد طبیعی باشد که $b_k\ge ۱$،

$$b_j\le ۰,\qquad j=۰,۱,\ldots,k-۱$$

در این‌صورت،

$$a_k=b_{k-۱}-۲k_k\le -۲$$

پس دست‌کم یکی از ضرایب $P(x)$ کوچکتر از یا مساوی با ۲- است.

۱۸- ماخ گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که اگر $t=۰$ و $t=۱$، آنگاه از $(x,y)\in C_t$ نتیجه می‌شود،

$$yt+(۱-t)x\ge(۱-t)t,\qquad ۰\le x,y\le ۱$$

و در نتیجه،

$$y\ge\frac{t-۱}{t}x+۱-t=۱+x-\frac{x}{t}-t$$

توجه کنید که در مجموعه S، به‌ازای $t\in(۰,۱)$،

$$\frac{x}{t}+t\le ۲\sqrt{x}$$

بنابراین،

$$y\ge ۱+x-۲\sqrt{x}=(۱-\sqrt{x})^{۲}$$

و درنتیجه، $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge ۱$. چون $C_{۰}=C_{۱}=S$، نتیجه می‌شود

$$A\subseteq S\cap\{(x,y)\mid\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge ۱\}$$

از طرف دیگر، به آسانی می‌توان دید که

$$S\cap\{(x,y)\mid\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge ۱\}\subseteq A$$

در نتیجه

$$S\cap\{(x,y)\mid\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge ۱\}=A$$

۱۹- گزینه (الف) صحیح است.

بردار $x_j=(\alpha_1^j,\alpha_2^j,\dots,\alpha_{10}^j)$ را به‌ازای $1\le j\le 1375$ چنین تعریف می‌کنیم:

اگر توان P_i در حاصل‌ضرب $a_1a_2\dots a_j$ برابر r باشد و $r\overset{2}{\equiv}s$ که $s\in\{0,1\}$ قرار می‌دهیم $\alpha_j^j=s$ روشن است که $\alpha_i^j(1\le j\le 1375, 1\le i\le 10)$ یا ۰ است یا ۱.

پس تعداد بردارهای x_j متمایز حداکثر 2^{10}، یعنی ۱۰۲۴ است. پس بین $x_1,x_2,\dots,x_{1375}$ دست‌کم دو بردار مانند x_l و x_k $(k<l)$ برابرند. پس به‌ازای $1\le i\le 10$، اگر تعداد P_i بین $a_1,a_2,\dots,a_l$ زوج باشد تعداد P_iها بین $a_1,a_2,\dots,a_k$ و بنابراین $a_{k+1},a_{k+2},\dots,a_l$ نیز زوج است. اگر تعداد P_i بین $a_1,a_2,\dots,a_l$ فرد باشد، تعداد P_i بین $a_1,a_2,\dots,a_k$ نیز فرد و بنابراین بین $a_{k+1},a_{k+2},\dots,a_l$ زوج است. پس $a_{k+1}a_{k+1}\dots a_l$ مربع کامل است.

۲۰- گزینه (د) صحیح است.

فرض کنید $O(n)$ نشان‌دهنده بزرگترین عدد صحیح k باشد که $2^k\mid n$. توجه کنید که

$$A=\frac{9^{4n}-1}{8}$$

و همچنین،

$$9^{2^{t+1}.s}-1=(9^{2^t.s}-1)(9^{2^{t}\dots}+1)$$

چون $9^{2^t.s}+1$ عددی به‌صورت $4k+2$ است، نتیجه می‌شود

$$O(9^{2^{t+1}.s}-1)=O(9^{2^t.s}-1)+1$$

حال اگر s عدد فردی باشد،

$$O(9^s-1)=3$$

و بنابراین

$$O(\frac{9^{2^{1375+2}.s}-1}{8})=1377$$

۲۱- گزینه (هـ) صحیح است.

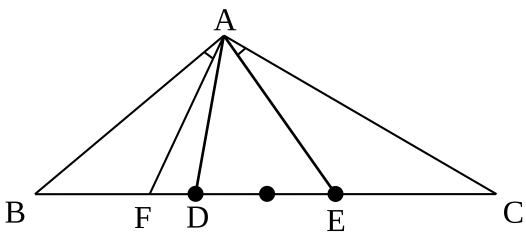
دقت کنید که برای هر عدد حقیقی x داریم،

$$x^2-(x-\frac{1}{2})=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$$

پس $x^2>x-\frac{1}{2}$ و با توجه به این که اگر $f(x-\frac{1}{2})=0$، آنگاه $f(x^2)=0$ نتیجه می‌شود که اگر f یک ریشه داشته باشد بینهایت ریشه برای آن پیدا می‌شود. بنابراین f ریشه ندارد و در نتیجه، $g(x)$ همواره مثبت است.

۲۲- گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید $\angle BAF = \alpha$.



در مثلث ABF می‌توانیم بنویسیم،

$$\frac{BF}{AF} = \frac{\sin\alpha}{\sin B}$$

در مثلث AEC می‌توانیم بنویسیم،

$$\frac{EC}{AE} = \frac{\sin\alpha}{\sin C}$$

پس

$$\frac{BF}{EC} = \frac{AF}{AE}\cdot\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AF}{AE}\cdot\frac{c}{b} \qquad (۱)$$

همچنین، در مثلث ABE نیز به‌طور مشابه داریم،

$$\frac{BE}{AE} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin B}$$

و در مثلث ACF می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{FC}{AF} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin C}$$

پس

$$\frac{BE}{FC} = \frac{AE}{AF}\cdot\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AE}{AF}\cdot\frac{c}{b} \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود،

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{BE}{EC} = \frac{c^۲}{b^۲}$$

اما چون $BD = EC$ و $BE = CD$، خواهیم داشت،

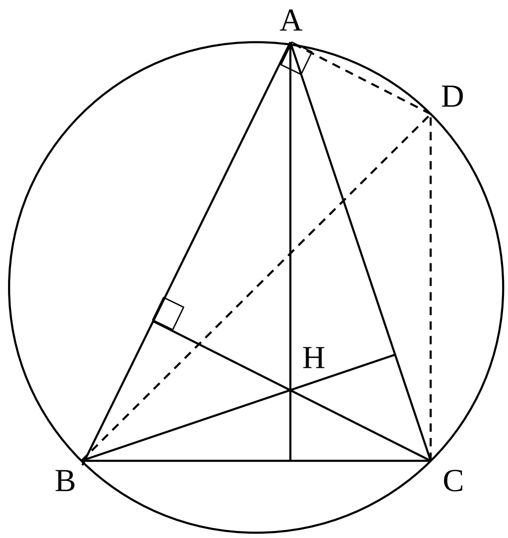
$$\frac{BE}{EC} = \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c}$$

و بنابراین

$$\frac{BF}{FC} = \frac{c^۳}{b^۳}$$

۲۳- گزینه (د) صحیح است.

در نقطه C خطی بر BC عمود می‌کنیم تا دایره محیطی مثلث را در D قطع کند.



روشن است که BD قطر دایره است و بنابراین، $\angle BAD = ۹۰^\circ$.
پس، $CH \,||\, DA$ و $CD \,||\, AH$. یعنی چهارضلعی $AHCD$ متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه، $AH = CD$ همچنین، $BC = AH$ و بنابراین، در مثلث BCD زاویه BDC برابر ۴۵° است. چون $\angle BAC = \angle BDC$، نتیجه می‌گیریم که زاویه BDC برابر ۴۵°.

۲۴- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

مجموعه عددهای طبیعی فرد کوچکتر از ۱۰۰ را در نظر بگیرید. به ازای هر یک از این عددها مانند j، حداکثر یکی از دو عدد j و $۲j$ می‌توانند در مجموعه مورد نظر قرار داشته باشند، پس از دو زیرمجموعه

$$\{۱,۲,۵,\dots,۹۹\},\qquad \{۲,۴,۶,\dots,۹۸\}$$

حداکثر $\left[\frac{۹۹}{۲}\right]$ عدد در مجموعه مورد نظر قرار دارند. به‌همین ترتیب از دو مجموعه مضارب ۴ و مضارب ۸ عددهای فرد، یعنی

$$\{۴,۱۲,۲۰,۲۸,\dots,۹۸\}\ ,\qquad \{۸,۲۴,۴۰,\dots,۸۸\}$$

حداکثر $\left[\frac{۹۹}{۸}\right]$ عدد در مجموعه مورد نظر قرار دارند. با ادامه این استدلال نتیجه می‌شود که حداکثر تعداد عضوهای مجموعه مورد نظر برابر است با

$$\left[\frac{۹۹}{۲}\right]+\left[\frac{۹۹}{۸}\right]\left[\frac{۹۹}{۳۲}\right]+\left[\frac{۹۹}{۶۴}\right]=۶۶$$

۲۵- ماخ گزینه (هـ) صحیح است.

نشان می‌دهیم هر دنباله‌ای با خاصیت بیان شده اکیداً صعودی است. در این‌صورت روشن است که $n_k \geq k$ و از رابطه $n_{k+۱} > n_{n_k}$ نتیجه می‌شود که $k+۱ > n_k$. در نتیجه، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $k, n_k = k$. برای اثبات اینکه $\{n_k\}$ دنباله‌ای صعودی است توجه می-

کنیم که n_1 از همه اعضای دنباله اکیداً کوچکتر است زیرا اگر عضو مینیمم دنباله α باشد و به‌ازای $k > 1$ داشته باشیم $n_k = \alpha$، آنگاه $n_{n_{k-1}} < \alpha$ که تناقض است. حال اگر n_1 را از دنباله حذف کنیم و دنباله جدید

$$n_2, n_3, \dots$$

را درنظر بگیریم این دنباله نیز این خاصیت را دارد. بنابراین n_2 کوچکترین عضو آن است. به این‌ترتیب نتیجه می‌شود که $\{n_k\}$ دنباله‌ای اکیداً صعودی است.

۲۶- ماخ گزینه (الف) صحیح است.

توجه کنید که

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=0}^{7} 2^t \sum_{i=1}^{8} \binom{i-1}{t} \\ &= \sum_{t=0}^{7} \sum_{i=1}^{8} 2^t \binom{i-1}{t} \\ &= \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=0}^{7} 2^t \binom{i-1}{t} \\ &= \sum_{i=1}^{8} 3^{i-1} \\ &= \frac{3^8 - 1}{2} \\ &= 3280 \end{aligned}$$

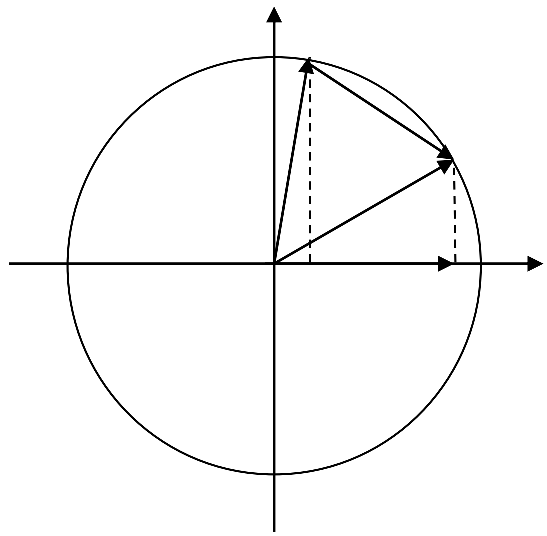
۲۷- ماخ گزینه (الف) صحیح است.

اگر جایگشتی که جای x_i و x_j را عوض می‌کند روی $\{x_i\}$ عمل کند $\prod_{1\le i<j\le 9}(x_i - x_j)$ قرینه می‌شود. اما اثر این جایگشت روی جملات بسط حاصل‌ضرب، جمله $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_9^4$ را ثابت نگاه می‌دارد. پس ضریب این جمله جمله صفر است. (در واقع همین استدلال نشان می‌دهد که در جمله‌های با ضریب ناصفر، هیچ دو توانی برابر نیستند).

۲۸- ماخ گزینه (الف) صحیح است.

اگر بردارها را یک در میان (مطابق شکل) از هم کم کنیم $|\overrightarrow{R} - \overrightarrow{B}|$ برابر مجموع بردارهای به‌دست آمده خواهد بود. امّا این بردارها پشت سر هم و مجزا هستند لذا مجموعه آنها در واقع نقطه‌ای از دایره را به نقطه‌ای در درون یا روی دایره انتقال می‌دهد پس طول بردار $\overrightarrow{R} - \overrightarrow{B}$ کمتر از یا مساوی با قطر دایره، یعنی ۲ است.

۲۹- ماخ گزینه (د) صحیح است.



فرض کنید x نقطه‌ای باشد که کمترین تعداد نقاط در فاصله کمتر یا مساوی ۱۲۰° از آن قرار دارند (مثلاً k نقطه). هر کدام از این k نقطه خود k نقطه دیگر در فاصله کمتر یا مساوی ۱۲۰° دارند. همچنین، هر دو نقطه از $۲۴-k$ نقطه دیگ نیز در فاصله‌ای کمتر از ۱۲۰° از هم قرار دارند. پس تعداد کمانهای کمتر یا مساوی ۱۲۰° حداقل برابر است با

$$\binom{k+۱}{۲}+\binom{۲۴-k}{۲}=\frac{k^۲}{۲}+\binom{۲۴-k}{۲}+k$$

که کمترین مقدار آن به‌ازای $k=۱۲$ یا $k=۱۳$ برابر ۱۴۴ است. (۱۲ نقطه نزدیک یک قطب و ۱۳ نقطه نزدیک قطب دیگر، ۱۴۴ را به‌دست می‌دهند.)

۳۰- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که

$$\angle BHC=\frac{\angle BC+\angle AD}{۲}=\angle BC$$

و چون $\angle BOC=BC$ پس $OHBC$ محاطی است و با استفاده از قضیه بطلمیوس داریم $y-x=ab$.